

UNIVERSITÄT REGENSBURG

ANFÄNGERPRAKTIKUM B

Versuch: Gekoppelte Pendel (gp)

Fabian Tanzer

26. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Grundlagen	2
2.1	Pendelschwingung	2
2.2	Gekoppelte Schwingung	3
2.3	Schwingungsdauern	4
2.4	Kopplungsgrad	6
3	Vorbereitungsaufgaben	7
3.1	Eigenkreisfrequenz bei gegenphasiger und gleichsinniger Schwingung	7
3.2	Molekülphysik	7
3.3	Stimmen von Musikinstrumenten	7
3.4	Frahmscher Schlingertank	7
4	Versuchsdurchführung	9
4.1	Schwingungsdauern bestimmen	9
4.2	Gekoppelte Schwingung in Phase	11
4.3	Gekoppelte Schwingung gegenphasig	12
4.4	Gekoppelte Schwingung	13
4.5	Berechnete Werte	14
4.6	Bestimmung des Kopplungsgrades	15
5	Fazit	16

1 Einleitung

In diesem Versuch wird die Oszillation zweier identischer, gekoppelter Pendel untersucht. Insbesondere wird dabei die Schwebungsdauer, also das Intervall zwischen zwei Zeitpunkten, in denen ein Pendel mit seiner minimalen Amplitude schwingt, berechnet. Außerdem soll man mit Begriffen wie Richtmoment, Drehmoment und Schwebung vertraut werden.

2 Grundlagen

Zuerst werden folgende Größen für das gekoppelte Pendel eingeführt:

$\varphi_{01}, \varphi_{02}$: Winkel der Ruhelage gegenüber der Lotrechten

ψ_{01}, ψ_{02} : Auslenkwinkel aus der Ruhelage ($\psi_1 := \varphi_1 - \varphi_{01}$, $\psi_2 := \varphi_2 - \varphi_{02}$)

Dies wird nochmal in folgender Abbildung veranschaulicht:

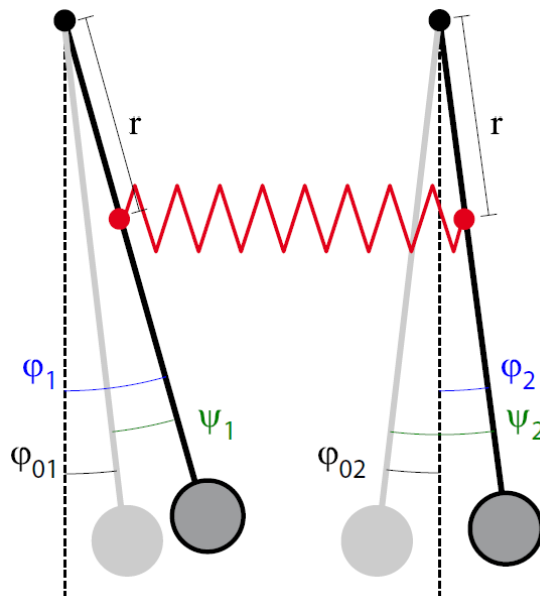


Abb. 1: Gekoppelte Pendelschwingung [1]

Sind beide Pendel identisch (also gleiches Material, gleiche Länge, ...) und beginnt die Oszillation von z. B. Pendel 2, während Pendel 1 in Ruhe ist, so wird durch die gekoppelte Schwingung die Energie mit der Zeit vollständig auf Pendel 1 übertragen, so dass schließlich Pendel 1 gerade zur Ruhe kommt, wenn Pendel 2 mit maximaler Amplitude schwingt. Die Zeit zwischen zwei Fällen minimaler (oder maximaler) Auslenkung nennt man **Schwebungsdauer** T_S .

Die Oszillation zweier identischer (gleiches Material, gleiche Länge, ...), gekoppelter, idealer (keine Reibung, Dämpfung, ...) Pendel kann betrachtet werden als Superposition zweier natürlicher Oszillationen, also zweier Pendel in Phase ($\varphi_1 = \varphi_2$) oder außer Phase ($-\varphi_1 = \varphi_2$).

2.1 Pendelschwingung

Vernachlässigt man die Reibung, so ergibt sich folgende Bewegungsgleichung für eine harmonische Schwingung:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi(t) = 0 \quad (1)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung lautet:

$$\varphi(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) \quad (2)$$

mit

φ : Auslenkwinkel
 ω_0 : Eigenkreisfrequenz
 $a = \varphi(0)$: anfängliche Winkelauslenkung
 $b\omega_0 = \dot{\varphi}(0)$: anfängliche Winkelgeschwindigkeit

2.2 Gekoppelte Schwingung

Im Folgenden soll nun auf die (Feder-)Kopplung zweier mechanischer Pendel eingegangen werden. Außerdem seien die Schwingungsdauern, also die Längen, der beiden Pendel gleich. Dann ergeben sich folgende Möglichkeiten:

1. Gleichsinnige Schwingung („in Phase“)

- gleiche Auslenkwinkel $\psi_1(0) = \psi_2(0)$
- keine Drehmomente auf Pendel
- gleiche Frequenz $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{gl}$

2. Gegensinnige Schwingung („gegenphasig“, „außer Phase“)

- gleiche Auslenkwinkel in entgegengesetzte Richtungen $\psi_1(0) = -\psi_2(0)$
- Kopplungsfeder verformt sich und übt Drehmomente auf die Pendel aus
- Eigenfrequenz $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{geg}$

3. Kopplungsschwingung bzw. Schwebungsschwingung

- Auslenkwinkel $\psi_1(0) \neq 0 = \psi_2(0)$

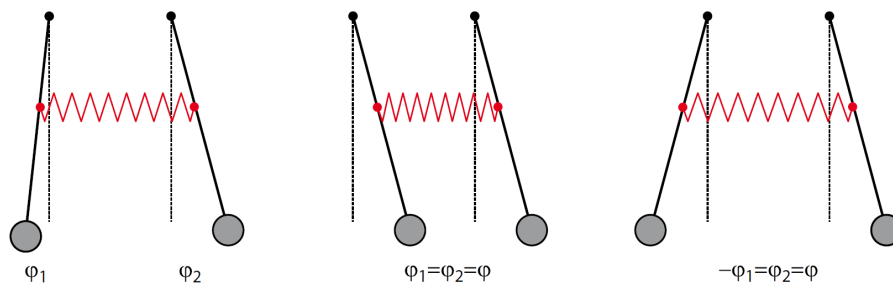


Abb. 2: Gekoppelte Pendelschwingungen: Links: allgemeiner Fall mit unterschiedlichen, maximalen Auslenkwinkeln $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Mitte: Oszillation in Phase mit $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Rechts: Oszillation außer Phase mit $-\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ [1]

Für den letztgenannten, allgemeinen Fall definieren wir:

ω_+ : Kreisfrequenz, mit der beide Pendel schwingen ($\omega_+ \approx \omega_{gl} \approx \omega_{geg}$)

ω_- : Kreisfrequenz, mit der sich die Amplitude der Schwingung ändert (Schwebung)

Ausgehend von einem symmetrischen Aufbau, also

- gleiche Pendellänge

- gleiches Trägheitsmoment Θ
- gleiche Winkelrichtgröße $\tilde{D}$ („Rückstellmoment“, Verhältnis von Drehmoment zum Drehwinkel)

und einer linearen Kopplung (Hookesches Gesetz mit Federkonstante D), gilt für das Drehmoment M_1 des ersten Pendel

$$M_1 = -\tilde{D}\varphi_1 + Dr^2(\varphi_2 - \varphi_1) + M_0 \quad (3)$$

Da wir einen symmetrischen Aufbau vorausgesetzt haben, gilt:

$$\varphi_0 := \varphi_{01} = -\varphi_{02} \quad (4)$$

Und schließlich ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen Drehmoment und Winkelbeschleunigung:

$$M_1 = \Theta\ddot{\varphi}_1(t) = \Theta\ddot{\psi}(t) \quad (5)$$

$$M_2 = \Theta\ddot{\varphi}_2(t) = \Theta\ddot{\psi}(t) \quad (6)$$

Führt man nun noch die Abkürzungen

$$\omega_{gl}^2 = \frac{\tilde{D}}{\Theta} \quad (7)$$

$$k^2 = \frac{Dr^2}{\Theta} \quad (8)$$

ein, so ergibt sich ein System gekoppelter Differentialgleichungen:

$$\ddot{\psi}_1(t) + \omega_{gl}^2\psi_1 = +k^2(\psi_2 - \psi_1) \quad (9)$$

$$\ddot{\psi}_2(t) + \omega_{gl}^2\psi_2 = -k^2(\psi_2 - \psi_1) \quad (10)$$

deren Lösung die Pendelbewegung beschreibt:

$$\psi_1(t) = \frac{[a_1 \sin(\omega_{gl}t) + a_2 \cos(\omega_{gl}t)] + [a_3 \sin(\omega_{geg}t) + a_4 \cos(\omega_{geg}t)]}{2} \quad (11)$$

$$\psi_2(t) = \frac{[a_1 \sin(\omega_{gl}t) + a_2 \cos(\omega_{gl}t)] - [a_3 \sin(\omega_{geg}t) + a_4 \cos(\omega_{geg}t)]}{2} \quad (12)$$

bzw.

$$\varphi_1(t) = \frac{[a_1 \sin(\omega_{gl}t) + a_2 \cos(\omega_{gl}t)] + [a_3 \sin(\omega_{geg}t) + a_4 \cos(\omega_{geg}t)]}{2} + \varphi_0 \quad (13)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{[a_1 \sin(\omega_{gl}t) + a_2 \cos(\omega_{gl}t)] - [a_3 \sin(\omega_{geg}t) + a_4 \cos(\omega_{geg}t)]}{2} - \varphi_0 \quad (14)$$

2.3 Schwingungsdauern

Es ergeben sich die natürlichen Oszillationsperioden

$$T_{gl} = \frac{2\pi}{\omega_{gl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (15)$$

$$T_{geg} = \frac{2\pi}{\omega_{geg}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + 2k}} \quad (16)$$

wobei folgende Größen verwendet werden:

L : Pendellänge

g : Ortskonstante

Mit den Abkürzungen

$$\omega_- = \frac{\omega_{\text{geg}} - \omega_{\text{gl}}}{2} \quad (17)$$

$$\omega_+ = \frac{\omega_{\text{geg}} + \omega_{\text{gl}}}{2} \quad (18)$$

ergibt sich die mittlere Periode T_m :

$$\frac{2\pi}{T_m} = \omega_+ = \frac{\pi}{T_{\text{gl}}} + \frac{\pi}{T_{\text{geg}}} \quad (19)$$

$$\Leftrightarrow T_m = 2 \frac{T_{\text{gl}} T_{\text{geg}}}{T_{\text{gl}} + T_{\text{geg}}} \quad (20)$$

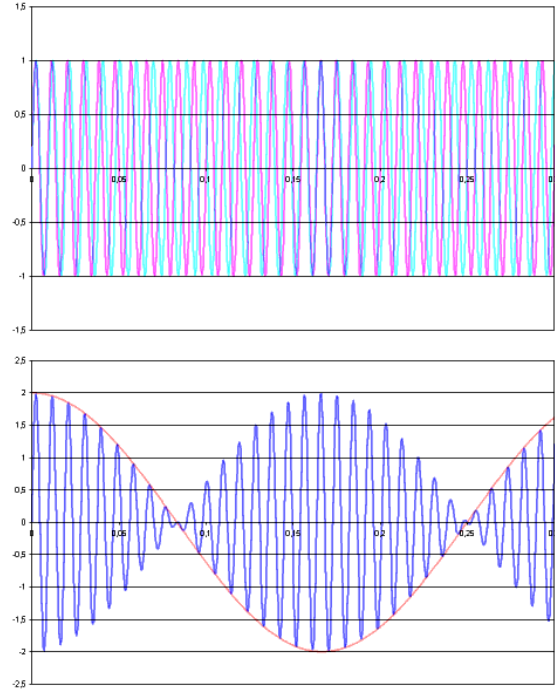


Abb. 3: Schwebung zweier Frequenzen. Oben: Die beiden Frequenzen f_1 und f_2 in den Farben Cyan und Magenta. Unten: Schwebung, gebildet durch Addition der beiden obigen Verläufe. $f_{\text{blau}} = \frac{f_1 + f_2}{2}$, $f_{\text{Einhüllende}} = f_{\text{rot}} = \frac{f_1 - f_2}{2}$ [3]

Die Schwebungsdauer T_S ergibt sich mit

$$\frac{2\pi}{T_S} = \omega_- = \frac{\pi}{T_{\text{geg}}} - \frac{\pi}{T_{\text{gl}}} \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow T_S = 2 \frac{T_{\text{gl}} T_{\text{geg}}}{T_{\text{gl}} - T_{\text{geg}}} \quad (22)$$

2.4 Kopplungsgrad

Der Kopplungsgrad K

$$K := \frac{\omega_{\text{geg}}^2 - \omega_{\text{gl}}^2}{\omega_{\text{geg}}^2 + \omega_{\text{gl}}^2} \quad (23)$$

$$= \frac{T_{\text{gl}}^2 - T_{\text{geg}}^2}{T_{\text{gl}}^2 + T_{\text{geg}}^2} \quad (24)$$

ist ein Maß für die Stärke der Kopplung.

3 Vorbereitungsaufgaben

3.1 Eigenkreisfrequenz bei gegenphasiger und gleichsinniger Schwingung

Mit (15) und (16) folgt, dass:

$$\omega_{\text{geg}} = \sqrt{\frac{g + 2k}{L}} > \sqrt{\frac{g}{L}} = \omega_{\text{gl}} \quad (25)$$

Der Grund hierfür ist also die Kopplung mit der Feder, wodurch $k > 0$ gilt.

3.2 Molekülphysik

Moleküle bestehen bekanntlich aus Atomen, die um ihre Ruhelage oszillieren können. Zwischen den Atomen herrschen Bindungen. In Molekülen zum Beispiel kovalente Bindungen und in Ionenkristallen ionische Verbindungen. Diese Bindungen entsprechen der Kopplung, also in unserem Versuch der Feder. Die Stärke der Bindungen lässt sich im Versuch durch unterschiedliche Federkonstanten realisieren. Außerdem ist die Oszillation der Atome um ihre Ruhelage von Druck und Temperatur abhängig.

3.3 Stimmen von Musikinstrumenten

Im Folgenden wird eine Gitarre mit mehreren Saiten betrachtet. Ist eine dieser Saiten gegenüber den anderen verstimmt, so kann man eine Schwebung¹ hören. Durch das Stimmen der Gitarrensaiten tritt keine Schwebung mehr auf. Grundsätzlich besitzt eine tiefer Ton (kleine Frequenz f) nach der Formel $T = \frac{1}{f}$ eine große Periodendauer T . Mit (22) folgt also, dass die Schwebungsdauer T_S für kleine Frequenzen f größer ist, als für hohe Frequenzen. Dadurch kann man T_S bei kleinen Frequenzen besser wahrnehmen und somit die Gitarre auch besser stimmen als bei hohen Frequenzen.

Will man nun Schwebungen mit sehr hohen Frequenzen messen, so muss man einen Ton mit ähnlicher Frequenz ω_2 erzeugen. So tritt Schwebung auf. Dann lässt sich mit der Formel

$$\omega_1 \stackrel{(17)}{=} 2\omega_- + \omega_2 \quad (26)$$

$$\stackrel{(21)}{=} \frac{4\pi}{T_S} + \omega_2 \quad (27)$$

leicht die Frequenz ω_1 des Tons ermitteln.

3.4 Frahmischer Schlingertank

Ein Schiff wird durch die Wasserwellen Schwingungen entlang seiner Längsachse durchführen. Dies wird - genauso wie beim Flugzeug - als „Rollen“ bezeichnet:

¹Effekt, dass die Superposition zweier Schwingungen, die sich in ihrer Frequenz nur wenig voneinander unterscheiden, eine periodische zu- und abnehmende Amplitude aufweist [3]

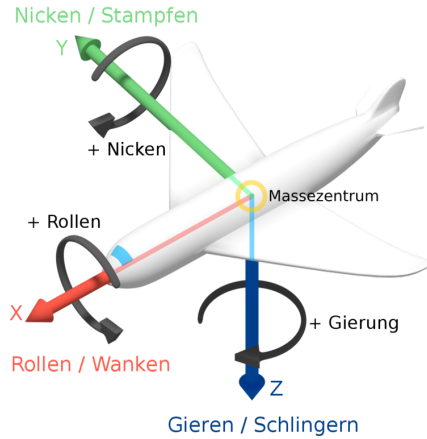


Abb. 4: Roll-Nick-Gier Winkel (Eulerwinkel) [2]

Oszillieren die Wasserwellen mit der Resonanzfrequenz des Schiffes, so schaukelt sich das Schiff besonders stark auf.

Man kann also ein Schiff in Bezug auf die Schwingungen, die es in stürmischer See ausführt, durch folgende Abbildung wiedergeben:

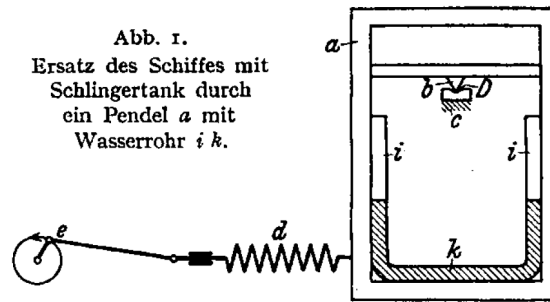


Abb. 5: Ersatz des Schiffes mit Schlingertank durch ein Pendel [4]

In dieser Abbildung sieht man bereits einen U-förmigen Wassertank im Schiff verbaut. Dieses Wasser kann ebenfalls Schwingungen durchführen. „Bei den Schwingungen strömt Flüssigkeit von einer Tankseite zur anderen über und vernichtet durch die damit verbundene Reibungs- und Wirbelungsverluste einen Teil der Schwingungsenergie“[4]. Im Resonanzfall ergibt sich zwischen den Wasserwellen und den Schiffsschwingungen eine Phasenverschiebung von 90° :

$$\Delta\varphi = \varphi_{\text{Wasser}} - \varphi_{\text{Schiff}} = 90^\circ \quad (28)$$

Zusätzlich ergibt sich aber auch zwischen den Schiffsschwingungen und dem Tank eine Phasenverschiebung von 90° :

$$\Delta\varphi = \varphi_{\text{Schiff}} - \varphi_{\text{Tank}} = 90^\circ \quad (29)$$

Im Gesamten ergibt sich also zwischen den Wasserwellen und dem Tank eine Phasenverschiebung von 180° und durch destruktive Interferenz kompensieren sich die Schwingungen. Also wird durch einen sog. Frahmischen Schlingertank² die Schlingerbewegung eines großen Schiffs verringert (Schiff-Stabilisator).

²Hermann Frahm

4 Versuchsdurchführung

Zuerst wird der Versuch gemäß Abb. 2 aufgebaut. Hierbei ist vor allem auf die Nadellager der beiden Pendel zu achten. Da die Nadeln sehr spitz sind, sind sie empfindlich und stellen zudem eine Verletzungsgefahr für die Praktikant*innen dar.

Die Winkelsensoren werden mit dem Messverstärker, welcher den Verstärkungsfaktor 10 besitzt, verbunden. Der Ausgang des Messverstärkers wird an das Oszilloskop und an das USB-Multimeter angeschlossen. Über das USB-Multimeter werden die Daten mit einer Auflösung von 2 Hz in eine Datei geschrieben. Das heißt es wird jede halbe Sekunde ein Spannungswert aufgezeichnet.

Diese Spannungswerte sind in den folgenden Diagrammen durch Punkte gekennzeichnet. Die Linien wurden dann durch eine automatische Glättung im Datenanalyseprogramm QtiPlot erzeugt. Man bezeichnet diese dann auch als Splines. Somit stellen die Linien also nicht zwingendermaßen den tatsächlichen Verlauf der Pendel dar. Vermutlich stimmt zwar dann die geplottete Frequenz relativ gut mit der tatsächlichen Frequenz überein, die Amplitude aber weniger gut, da das Programm keine weiteren Informationen über die Messpunkte hinaus hat. Am Anfang jedes Diagramms weicht der geplottete Verlauf sicher von dem tatsächlichen ab. Dies liegt an der Auslenkung, die man zu Beginn per Hand machen muss. Dieser Anfangsbereich ist aber nicht relevant für die eigentliche Messung.

Am Anfang wird bei absolutem Stillstand der Pendel der Offset der Winkelsensoren auf 0,0 V justiert.

4.1 Schwingungsdauern bestimmen

Zuerst wird das linke Pendel ausgelenkt und über die Winkelsensoren und den Messverstärker ein Datensatz aufgenommen:

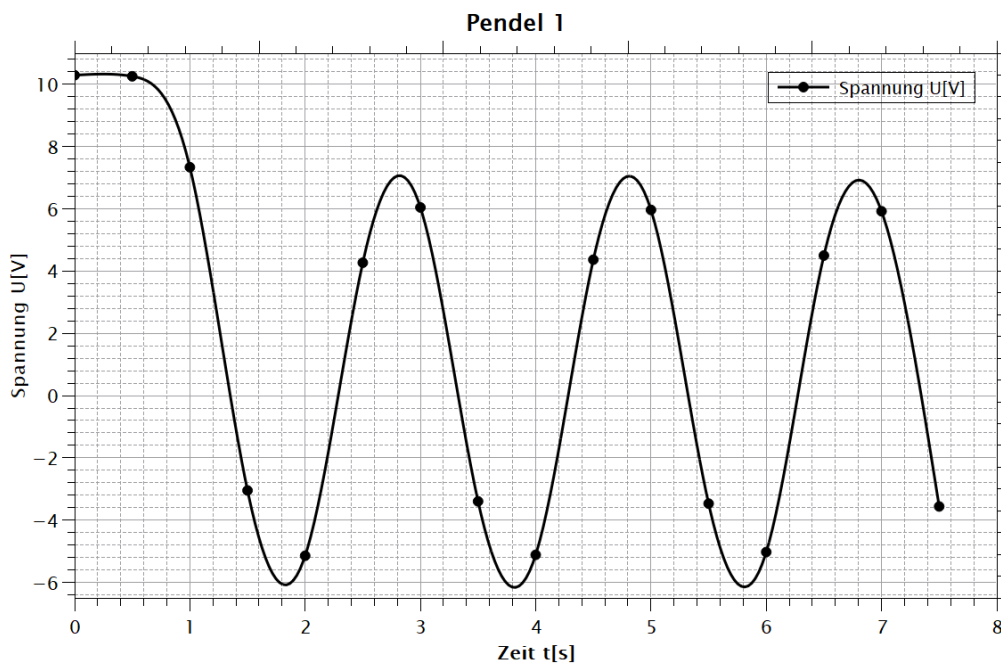


Abb. 6: Diagramm des linken Pendels

Liest man hier mithilfe des Datenlesers in QtiPlot die Zeiten bei den Nullstellen ab, so ergibt sich:

$$t_1 = 1,36 \text{ s}, t_2 = 3,33 \text{ s}$$

Damit ergibt sich für das linke Pendel folgende Periodendauer:

$$T_{01} = t_2 - t_1 \approx 1,97 \text{ s}$$

Nun wird das rechte Pendel ausgelenkt und ein Datensatz aufgenommen:

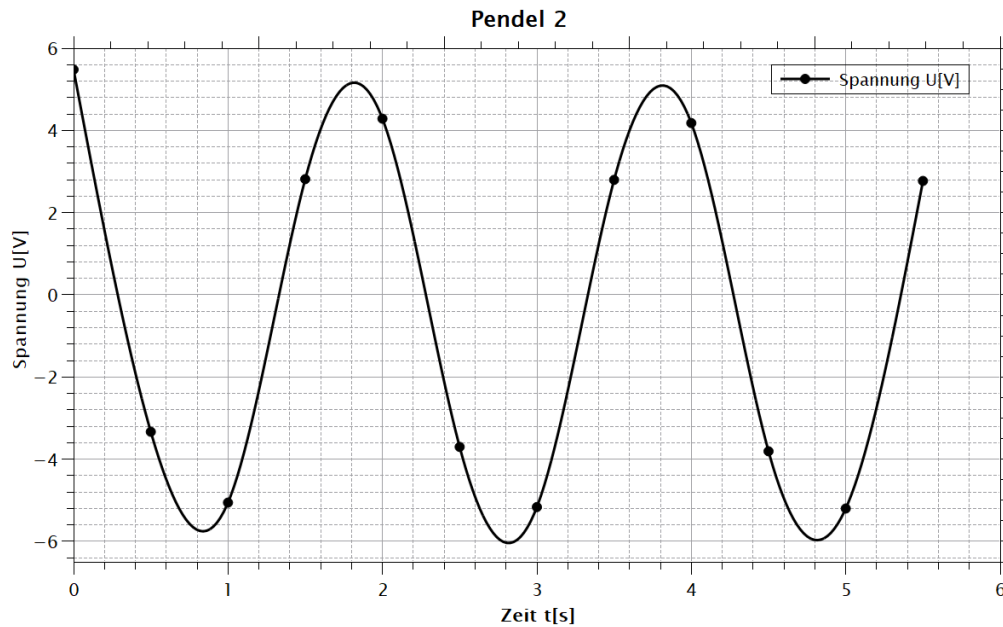


Abb. 7: Diagramm des rechten Pendels

Liest man hier mithilfe des Datenlesers in QtiPlot die Zeiten bei den Nullstellen ab, so ergibt sich:

$$t_1 = 0,27 \text{ s}, t_2 = 2,28 \text{ s}$$

Damit ergibt sich für das rechte Pendel folgende Periodendauer:

$$T_{02} = t_2 - t_1 \approx 2,01 \text{ s}$$

Die Periodendauern stimmen mit einer Abweichung von 2,0 % gut miteinander überein und damit gilt im Rahmen der Messgenauigkeit

$$T_{01} = T_{02}$$

Nun werden die Pendel über eine Kopplungsfeder miteinander verbunden. Diese Feder wird in die mittleren Löcher eingeführt und somit ist die Position der Befestigungsstelle nach Abb. 1:

$$r = 53,5 \text{ cm}$$

4.2 Gekoppelte Schwingung in Phase

Bei diesem Versuch werden beide Pendel um den gleichen Winkel ausgelenkt, um sie in Phase schwingen zu lassen. Es ergibt sich folgendes Diagramm:

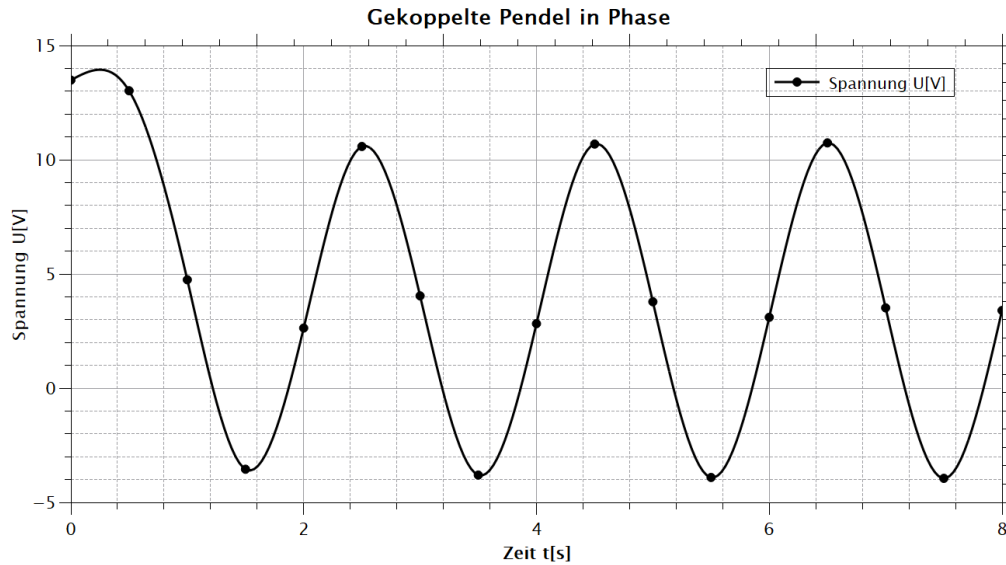


Abb. 8: Diagramm des gekoppelten Pendels in Phase

Liest man hier mithilfe des Datenlesers in QtiPlot die Zeiten bei den Nullstellen ab, so ergibt sich:

$$t_1 = 1,22 \text{ s}, t_2 = 3,20 \text{ s}$$

Damit ergibt sich für das Pendel folgende Periodendauer:

$$T_{\text{gl}} = t_2 - t_1 \approx 1,98 \text{ s}$$

Dies klingt realistisch, da nach (15) die Periodendauer für die gekoppelte gleichphasige Schwingung mit der Periodendauer für die ungekoppelte Schwingung übereinstimmen muss.

4.3 Gekoppelte Schwingung gegenphasig

Bei diesem Versuch werden beide Pendel um den gleichen Winkel in entgegengesetzte Richtungen ausgelenkt, um sie gegenphasig schwingen zu lassen. Es ergibt sich folgendes Diagramm:

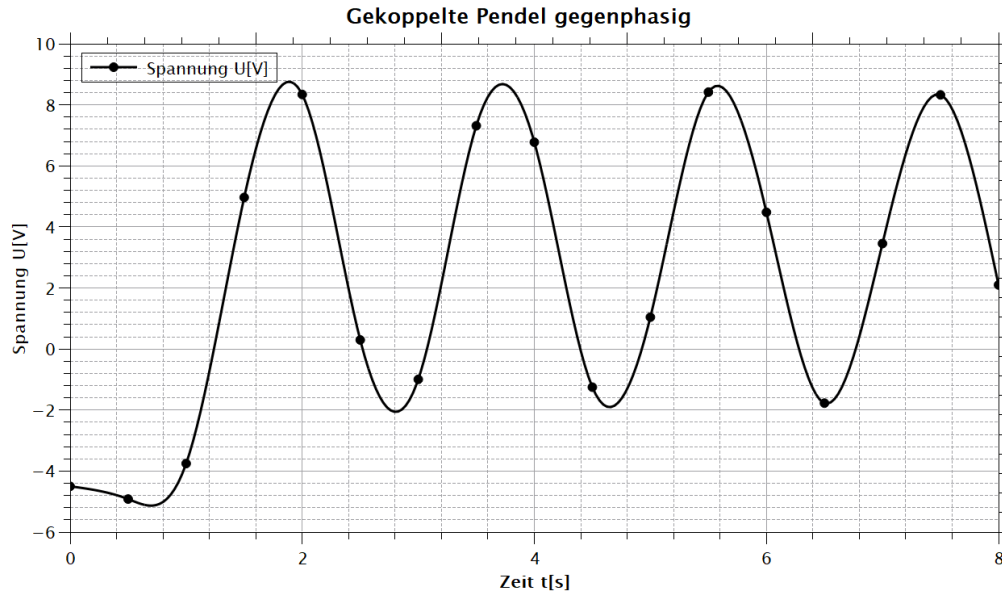


Abb. 9: Diagramm des gekoppelten Pendels gegenphasig

Liest man hier mithilfe des Datenlesers in QtiPlot die Zeiten bei den Nullstellen ab, so ergibt sich:

$$t_1 = 1,24 \text{ s}, t_2 = 3,07 \text{ s}$$

Damit ergibt sich für das Pendel folgende Periodendauer:

$$T_{\text{geg}} = t_2 - t_1 \approx 1,83 \text{ s}$$

Die Größenordnung passt, da nach Vorbereitungsaufgabe 3.1 die Periodendauer für die gekoppelte gegenphasige Schwingung kleiner als die Periodendauer für die gekoppelte Schwingung in Phase sein muss.

4.4 Gekoppelte Schwingung

Bei diesem Versuch wird nur ein Pendel ausgelenkt, um eine gekoppelte Schwingung zu erzeugen. Es ergibt sich folgendes Diagramm:

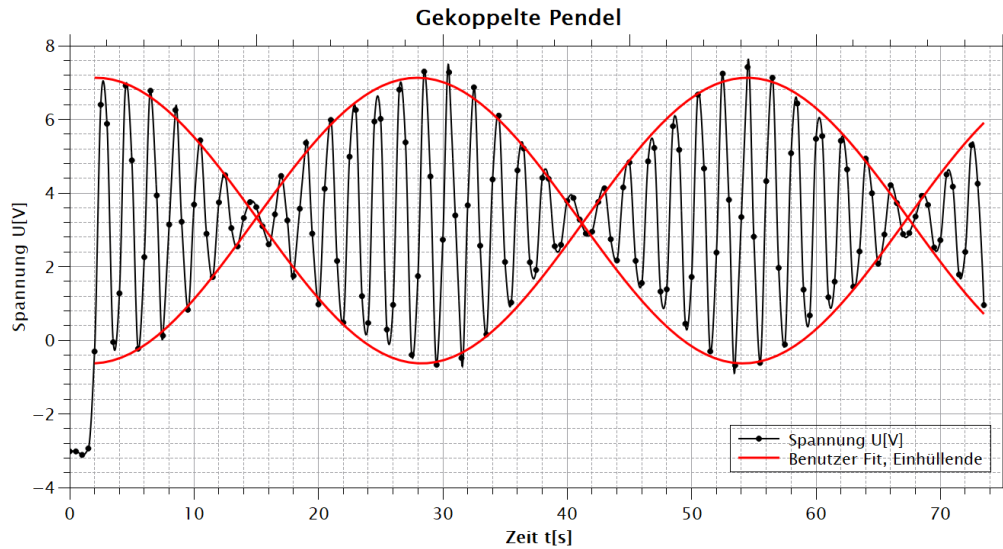


Abb. 10: Diagramm des gekoppelten Pendels

Liest man hier mithilfe des Datenlesers in QtiPlot die Zeiten bei zum Beispiel $U = 4\text{ V}$ ab, so ergibt sich:

$$t_1 = 18,62\text{ s}, t_2 = 20,48\text{ s}$$

Damit ergibt sich für das Pendel folgende Oszillationsperiode:

$$T_m = t_2 - t_1 \approx 1,86\text{ s}$$

Für die Schwebungsdauer müssen wir die Einhüllende betrachten:

$$t_1 = 15,4\text{ s}, t_2 = 67,5\text{ s}$$

Damit ergibt sich für das Pendel folgende Schwebungsdauer:

$$T_S = t_2 - t_1 \approx 52,1\text{ s}$$

4.5 Berechnete Werte

Berechnet man die Oszillationsperiode mit (20), so ergibt sich

$$T_m \approx 1,90 \text{ s}$$

Die berechnete Oszillationsperiode 1,90 s stimmt mit einer Abweichung von 2,2 % gut mit dem experimentellen Wert 1,86 s überein.

Berechnet man die Schwebungsdauer mit (22), so ergibt sich

$$T_S \approx 48 \text{ s}$$

Die berechnete Schwebungsdauer 48 s stimmt mit einer Abweichung von 8,5 % im Rahmen der Mess- und Ablesegenauigkeit mit dem experimentellen Wert 52,1 s überein.

4.6 Bestimmung des Kopplungsgrades

Bei dieser Aufgabe werden die Kopplungsgrade für verschiedene Aufhängungen bestimmt. Dazu wird ein Pendel um eine bestimmte Strecke aus der Ruhelage ausgelenkt und die Auslenkung des anderen Pendels gemessen. Der statische Kopplungsgrad ist das Verhältnis der beiden Winkel. Da die Winkel proportional zur gemessenen Spannung der Sensoren sind, kann man auch direkt die beiden Spannungswerte dividieren. Dafür muss zuerst der Offset auf 0,0 V gestellt werden oder die Spannungsdifferenzen dividiert werden.

Zuerst ist die Kopplungsfeder in die oberen Löcher ($r = 28,5 \text{ cm}$) eingehängt. Dafür ergibt sich ein Kopplungsgrad von

$$K = \frac{0,2}{8,0} \approx 0,03$$

Dann wird die Kopplungsfeder in die mittleren Löcher ($r = 53,5 \text{ cm}$) eingehängt. Dafür ergibt sich ein Kopplungsgrad von

$$K = \frac{0,4}{7,3} \approx 0,06$$

Dann wird die Kopplungsfeder in die unteren Löcher ($r = 78,5 \text{ cm}$) eingehängt. Dafür ergibt sich ein Kopplungsgrad von

$$K = \frac{1,3}{10,2} \approx 0,13$$

Da der Kopplungsgrad ein Maß für die Stärke der Kopplung ist, ist auch klar, dass der Kopplungsgrad für steigendes r größer wird.

5 Fazit

Ich fand den Versuch interessant, jedoch war es schwierig, die Pendel genau auszulenken. Dadurch kam es sicherlich zu Ungenauigkeiten. Nichtsdestotrotz stimmen unsere Ergebnisse größtenteils gut mit den erwarteten Werten überein. Durch diesen Versuch hat man noch einmal die Kenntnisse der Experimentalphysik 1 aufgefrischt. Mir wurde zum Beispiel erst durch diesen Versuch der Begriff „Schwebungsdauer“ richtig klar. Außerdem konnte ich den Umgang mit dem Programm „QtPlot“ verbessern, insbesondere die Funktion des Datenlesers. Ich kann also diesen Versuch empfehlen.

Abbildungsverzeichnis

1	Gekoppelte Pendelschwingung [1]	2
2	Gekoppelte Pendelschwingungen: Links: allgemeiner Fall mit unterschiedlichen, maximalen Auslenkwinkeln $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Mitte: Oszillation in Phase mit $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Rechts: Oszillation außer Phase mit $-\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ [1]	3
3	Schwebung zweier Frequenzen. Oben: Die beiden Frequenzen f_1 und f_2 in den Farben Cyan und Magenta. Unten: Schwebung, gebildet durch Addition der beiden obigen Verläufe. $f_{\text{blau}} = \frac{f_1+f_2}{2}$, $f_{\text{Einhüllende}} = f_{\text{rot}} = \frac{f_1-f_2}{2}$ [3]	5
4	Roll-Nick-Gier Winkel (Eulerwinkel) [2]	8
5	Ersatz des Schiffes mit Schlingertank durch ein Pendel [4]	8
6	Diagramm des linken Pendels	9
7	Diagramm des rechten Pendels	10
8	Diagramm des gekoppelten Pendels in Phase	11
9	Diagramm des gekoppelten Pendels gegenphasig	12
10	Diagramm des gekoppelten Pendels	13

Literaturverzeichnis

- [1] Marten Scheuck Dr. Stephan Giglberger. *Versuch "gp": Gekoppelte Pendel*. 2019.
- [2] [https://de.wikipedia.org/wiki/Roll Nick-Gier-Winkel](https://de.wikipedia.org/wiki/Roll_Nick-Gier-Winkel).
- [3] <https://de.wikipedia.org/wiki/Schwebung>.
- [4] Foepppl O. *Beitrag zur Theorie des Frahm'schen Schlingertanks*. Springer, 1934.